Programme de colle - Semaine n° 5: du 14/10/2024 au 18/10/2024

Connaissances minimales attendues

Chapitre 3 - Espaces vectoriels réels : révisions et compléments.

Se reporter à un programme de colles précédent.

Chapitre 4 - Calculs matriciels : révisions et compléments. Diagonalisation

- Définition formelle du produit matriciel ;
- Propriétés usuelles vérifiées par le produit matriciel ;
- Calculs des puissances d'une matrice carrée : puissances d'une matrice diagonale, puissances d'une matrice triangulaire supérieure stricte **(HP)**, d'une matrice nilpotente **(HP)**, utilisation d'un polynôme annulateur (par le biais d'un raisonnement par récurrence amenant des relations de récurrence usuelles ou d'une division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$), utilisation de la formule du binôme de Newton dans le contexte matriciel, utilisation d'une relation de similitude ;
- Inverse d'une matrice carrée ;
- Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle est inversible « à droite » si et seulement si elle est inversible « à gauche » ;
- Inverse de l'inverse d'une matrice inversible, inverse d'un produit de matrices inversibles, inverse des puissances d'une matrice inversible, inverse de la transposée d'une matrice inversible ;
- Caractérisation de l'inversibilité par les systèmes linéaires associés ;
- Caractérisation de l'inversibilité par le rang ;
- Une matrice A carrée d'ordre n est inversible si et seulement si la famille des colonnes de A est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si la famille des lignes de A est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;
- Caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires, et donc *a fortiori* des matrices diagonales ;
- Caractérisation de l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 par le déterminant ;
- Polynôme annulateur d'une matrice donnée, notation $Q(A)$;
- Existence d'un polynôme annulateur non nul pour n'importe quelle matrice carrée donnée ;
- Utilisation d'un polynôme annulateur dans l'étude de l'inversibilité d'une matrice carrée donnée ;
- Valeur propre, vecteur propre, spectre d'une matrice carrée ;
- $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
  si et seulement si $(A - \lambda I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ n'est pas de Cramer ;
- $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
  si et seulement si $\ker(A - \lambda I_n) \neq \left\{ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \right\}$;
- $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible ;

- $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n) < n$;
- Spectre d'une matrice triangulaire, d'une matrice diagonale ;
- A est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \;\middle|\; AX = \lambda X\right\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de référence $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \;\middle|\; AX = \lambda X\right\}$ est appelé sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ et est noté $E_\lambda(A)$;
- Polynôme annulateur d'une matrice carrée ;
- Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme annulateur d'une matrice carrée A, alors toute valeur propre de A est racine de Q ;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $1 \leqslant \dim(E_\lambda(A)) \leqslant n$;
- Une famille obtenue par concaténation de familles libres issues de sous-espaces propres distincts est libre.

Savoir-faire et Méthodes à savoir appliquer

« Les incontournables »

- « Les incontournables » du programme de colle précédent sont toujours au programme ;
- Calculer les puissances d'une matrice carrée :
  - ... en reconnaissant une matrice remarquable (diagonale, triangulaire stricte, nilpotente) ;
  - ... en conjecturant la formule, et en démontrant cette formule par récurrence ou par disjonction des cas ;
  - ... en utilisant un polynôme annulateur Q et un raisonnement par récurrence associé à un argument de liberté, ou une division euclidienne de X^n par Q ;
  - ... en utilisant la formule du binôme de Newton ;
  - ... en utilisant une relation de similitude.
- Étudier l'inversibilité d'une matrice carrée et éventuellement expliciter, sous réserve d'existence, son inverse :
  - ... en revenant à la définition ;
  - ... en mettant en évidence un inverse à droite ou un inverse à gauche ;
  - ... en résolvant un système linéaire bien choisi ;
  - ... en calculant le rang de la matrice ;
  - ... en utilisant la caractérisation de l'inversibilité des matrices triangulaires ;
  - ... en utilisant la caractérisation de l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 ;
  - ... en utilisant un polynôme annulateur
- Montrer qu'une matrice colonne est vecteur propre d'une matrice carrée ;
- Montrer qu'un réel est valeur propre d'une matrice carrée ;
- Déterminer le spectre d'une matrice carrée d'ordre n :
  - ... en reconnaissant une matrice triangulaire ;
  - ... en utilisant, dans le cas où $n = 2$, la caractérisation de l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 par le déterminant et en résolvant une équation du second degré ;
  - ... en déterminant l'ensemble des réels λ tels que le système linéaire $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ possède au moins une solution non nulle en échelonnant le système linéaire à paramètre $AX = \lambda X$ et en effectuant un diagnostic post-échelonnement ;
  - ... en déterminant l'ensemble des réels λ tels que $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$;
  - ... en utilisant les racines d'un polynôme annulateur de la matrice considérée.
- Expliciter une famille génératrice et une base des sous-espaces propres d'une matrice donnée.

« Et plus si affinités ... »

- Manipuler les définitions formelles du chapitre 3 et 4 pour montrer des résultats théoriques généraux.

Preuves exigibles

Propositions

1. Pour tout vecteur u d'un espace vectoriel E muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ **[A]**.
2. $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible d'inverse $\mathcal{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ **[A]**.
3. Associativité du produit matriciel **[A]**.
4. Puissances d'une matrice diagonale **[A]**.
5. **(HP)** Puissances de deux matrices semblables **[C]**.
6. Formule du binôme de Newton dans le contexte matriciel **[A]**.
7. **(HP)** Toute matrice triangulaire stricte est nilpotente **[A]**.
8. Inversibilité et inverse du produit de deux matrices inversibles, d'une puissance d'une matrice inversible **[A]**.
9. Caractérisation de l'inversibilité des matrices carrées d'ordre 2 par le « déterminant » **[A]**.
10. Existence d'un polynôme annulateur non nul pour toute matrice carrée **[A]**.
11. **(HP)** Une matrice nilpotente n'est pas inversible **[C]**.
12. **(HP)** Inversibilité de toute matrice possédant un polynôme annulateur de coefficient constant non nul **[A]**.
13. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes **[C]** :
    (i) λ est valeur propre de A.
    (ii) il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$, $(A - \lambda I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$;
    (iii) $\ker(A - \lambda I_n) \neq \{ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \}$;
    (iv) le système linéaire homogène $(A - \lambda I_n)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ n'est pas de Cramer ;
    (v) la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible ;
    (vi) $\mathrm{rg}\,(A - \lambda I_n) < n$.
14. Le spectre d'une matrice triangulaire est donné par l'ensemble de ses coefficients diagonaux **[A]**.
15. **(HP ?)** Deux matrices semblables ont le même spectre **[A]**.
16. Si Q est un polynôme annulateur de A, alors toute valeur propre de A est racine de Q **[A]**.
17. Concaténation de familles libres issues de sous-espaces propres distincts (preuve dans le cas de 2 familles et dans le cas général) **[A]**.
18. **(HP ?)** La somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice carrée d'ordre n est inférieure à n **[A]**.
19. **(HP ?)** Une matrice carrée d'ordre n possède au plus n valeurs propres distinctes **[C]**.
20. La relation « être semblable à » (dans le contexte matriciel) est réflexive, symétrique et transitive **[A]**.

Exemples/ exercices

1. Détermination de l'ensemble des entiers naturels n non nul tels que l'ensemble des matrices carrées d'ordre n non inversibles constitue un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **[TD]**.

2. Pour tout espace vectoriel E, pour toute partie I de $\mathbb{N}$, pour toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels de E indexée par I, $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E **[TD]**.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute matrice colonne X non nulle de taille n, $\text{rg}\left(X^tX\right) = 1$ **[TD]**.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout couple (a, b) de réels distincts, la famille $\left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ **[TD]**.

5. On considère $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calcul de M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à partir de l'égalité $M^2 - 3M + 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et d'une division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$ (preuve complète à effectuer de manière autonome) **[C]** ;

6. On considère $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calcul de M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à partir de l'égalité $M^2 - 3M + 2I_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et de deux suites réelles auxiliaires **[Ac]** (à partir de l'énoncé proposé au niveau de l'**Exemple** 3).

7. On considère $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Calcul de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la formule du binôme de Newton **[Ac]**.

8. On considère $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   - Déterminer le spectre de B.
   - Déterminer les sous-espaces propres de B.

9. On considère $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **[C]**.

   - Déterminer le spectre de J (méthode au choix) **[C]** ;
   - Déterminer les sous-espaces propres de J.

[A] : Annexe **Preuves** ;
[C] : Preuve traitée au tableau **en cours** ;
[Ac] : Annexe **Corrections**
[TD] : Travaux Dirigés

Informatique

Tout le contenu des polycopiés :

- **TP1 - Cours (rappels)** et **TP1 - Exercices**
- **TP2 - Algorithmique de listes (rappels)** [calcul du (second) minimum (et indices associés), (second) maximum (et indices associés), des valeurs les plus proches (et indices associés), recherche dichotomique dans une liste triée, algorithmes gloutons (« plus grand nombre », « déplacement d'une grenouille », rendu de monnaie, problème des conférenciers), algorithmes de tri **(HP)** (tri-bulles et tri-par-insertion)).

sont au programme de cette semaine (y compris toutes les extensions hors-programme **(HP)**).
On pourra proposer aux étudiants des questions de cours d'informatique et/ou des exercices, en s'inspirant très fortement des exercices présents dans les polycopiés susmentionnés.

Quelques remarques destinées aux colleurs

- La colle commencera par quelques questions de cours (restitution d'une définition, d'une proposition/théorème, d'une ou des méthodes de base) ;
- On pourra demander aux élèves de prouver un des théorèmes (de manière complète ou incomplète) répertoriés dans la rubrique **Preuves exigibles** et tester la compréhension des élèves à propos de ce qu'ils écrivent ;
- Le premier exercice sera de difficulté modérée, non théorique et essentiellement calculatoire ;
- La séance de TD consacrée à la diagonalisation des matrices carrées aura lieu le 20 octobre. Ne proposer cette semaine que des exercices de niveau très modéré concernant cette thématique.
- Les exercices proposés devront être de niveau progressif ;
- On accordera un soin tout particulier à la rédaction et à la rigueur ;
- Toute erreur répertoriée dans le document Erreurs graves sera lourdement sanctionnée ;
- Si l'élève interrogé ne répond pas correctement aux questions de cours, on attribuera une note strictement inférieure à la moyenne, et ce indépendamment de la suite de l'interrogation orale.